UAA5 Séquence 7 : La factorisation

Comme vous l'avez sans doute appris, le retour à l'école n'est pas encore prévu pour tout de suite pour les classes de 3ème année. Nous ne pouvons toujours pas voir avec vous de nouvelles matières, et pourtant certains chapitres sont très importants pour la suite de votre scolarité en mathématique. C'est pourquoi je vais quand-même aborder avec vous le chapitre sur la factorisation, mais uniquement sur base de ce que vous avez vu en 2ème année. Les autres méthodes de factorisation feront peut-être l'objet d'un prochain document (si c'est permis). **Le correctif viendra par après**. Bon travail. MR BODART.

1) Définition

La factorisation d'une somme algébrique est la transformation de celle-ci en un produit de facteurs.

2) Méthodes de factorisation

a) La mise en évidence :

« Mettre un facteur en évidence » signifie « trouver un facteur commun aux différents termes ». La mise en évidence est l'opération « inverse » de la distributivité.

$$a \cdot (b + c) \xrightarrow{\text{Je distribue}} ab + ac$$

$$ab + ac \xrightarrow{\text{Je mets en évidence}} a \cdot (b + c)$$

Rappel : le signe « . » n'est pas obligatoire entre deux lettres, entre un nombre et une lettre, entre un nombre et des parenthèses, entre une lettre et des parenthèses, entre deux parenthèses.

Lorsque tous les termes d'une somme algébrique possèdent un (des) facteur(s) commun(s), on peut transformer cette somme en un produit de facteurs.
Ce produit est formé :

- Des facteurs communs et
- D'une somme constituée des quotients de chaque terme par les facteurs communs.

Exemples :

$6x + 15y = \mathbf{3}\ (2x + 5y)$ — 3 est le PGCD de 6 et 15. $3 \cdot 2x = 6x$ et $3 \cdot 5y = 15y$

$2a + ax - 4\,ab = \mathbf{a} \cdot (2 + x - 4b)$ — a est le PGCD des 3 termes 2a ; ax et 4ab

$13a^3 + 8a^2 = \mathbf{a^2} \cdot (13a + 8)$ — a^2 est le PGCD des 2 termes : $13a^3$ et $8a^2$

$15\,xy^2 - 18\,x^2y = \mathbf{3xy} \cdot (5y - 6x)$ — 3xy est le PGCD de $15xy^2$ et $18x^2y$

$a\,(b - 1) - 3\,(b - 1) = (b - 1) \cdot (a - 3)$ — b - 1 est le PGCD des 2 termes : a (b – 1) et 3 (b – 1)

Utile :

Attention : mise en évidence avec des parenthèses ⇨ ne jamais distribuer !!!

⇨ mettre en évidence les parenthèses !

$3(a - 2) - b(2 - a) = \mathbf{3 \,.\, (a - 2) + b \,.\, (a - 2)}$ car $-(2 - a) = \mathbf{-2 + a} = \mathbf{a - 2}$

$= \mathbf{(a - 2) \,.\, (3 + b)}$

b) Les groupements :

Les termes de l'expression algébrique ci-dessous n'ont pas de facteurs communs. Il est toutefois possible de factoriser cette expression après avoir groupé les termes de manière à faire apparaître un facteur commun.

Exemples :

1) $ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by)$

Si on place des ( ) devant un signe +, on ne change pas les signes situés à l'intérieur des ( ).

$= x \,.\, (a + b) + y \,.\, (a + b)$ On met en évidence dans chaque ( ) le facteur commun.

$= (a + b) \,.\, (x + y)$ On met en évidence le facteur commun.

2) $x + bx - y - by = (x + bx) - (y + by)$

Si on place des ( ) devant un signe - , on change TOUS les signes situés à l'intérieur des ( ).

$= x \,.\, (1 + b) - y \,.\, (1 + b)$ On met en évidence dans chaque ( ) le facteur commun.

$= (1 + b) \,.\, (x - y)$ On met en évidence le facteur commun.

c) Les produits remarquables :

Rappel : formules des produits remarquables

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exemples : $(x + 3y)^2 = x^2 + 2.x.3y + (3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$

$(a^3 - 5b)^2 = (a^3)^2 - 2.a^3.5b + (5b)^2 = a^6 - 10a^3b + 25b^2$

$(2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$

Lorsqu'on appliquait ces formules, on transformait un produit de facteurs (ou une puissance) en une somme ou une différence de termes.

Dans le but de factoriser, nous allons donc à présent utiliser ces formules dans l'autre sens !

- **Si le polynôme est un binôme :**

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

$a^2 + b^2$ est impossible à factoriser !!!

Exemples :

1) $a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = (a + 2) . (a - 2)$

2) $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x + 3) . (2x - 3)$

$(x - 2)^2 - (a - 1)^2 = [\,(x - 2) + (a - 1)] . [\,(x - 2) - (a - 1)]$

$= (x - 2 + a - 1) . (x - 2 - a + 1)$ On enlève les ( ) en respectant la règle des ( ).

$= (x + a - 3) . (x - a - 1)$ on réduit les termes semblables dans chaque ( ).

3) $50 - 2x^2 = 2 . (25 - x^2)$ (D'abord mettre en évidence)

$= 2 . (5^2 - x^2)$

$= 2 . (5 + x) . (5 - x)$

- **Si le polynôme est un trinôme :**

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Exemples :

1) $\underline{x^2} + 6x + \underline{9} = (x + 3)^2$

Recherches :

- somme de deux carrés dans le trinôme ?

$x^2 = (x)^2$ et $9 = (3)^2$ → OK

- le double produit existe-t-il ?

$2 . x . 3 = 6x$ → OK

---

2) $\underline{x^2} + \underline{4} - 4x = (x - 2)^2$

- somme de deux carrés ? x^2 et 2^2
- double produit (et son signe ?) $- 2 . 2 . x = - 4x$

---

3) $\underline{x^2} - 3x + \underline{1} =$ impossible

- somme de deux carrés ? x^2 et 1^2
- double produit (et son signe ?) $-2.x.1 = -2x$ faux

---

4) $\underline{4x^2} + 12x - \underline{9} =$ impossible

- somme de deux carrés ? $4x^2$ et $- 9$ faux car négatif
- double produit (et son signe ?) impossible

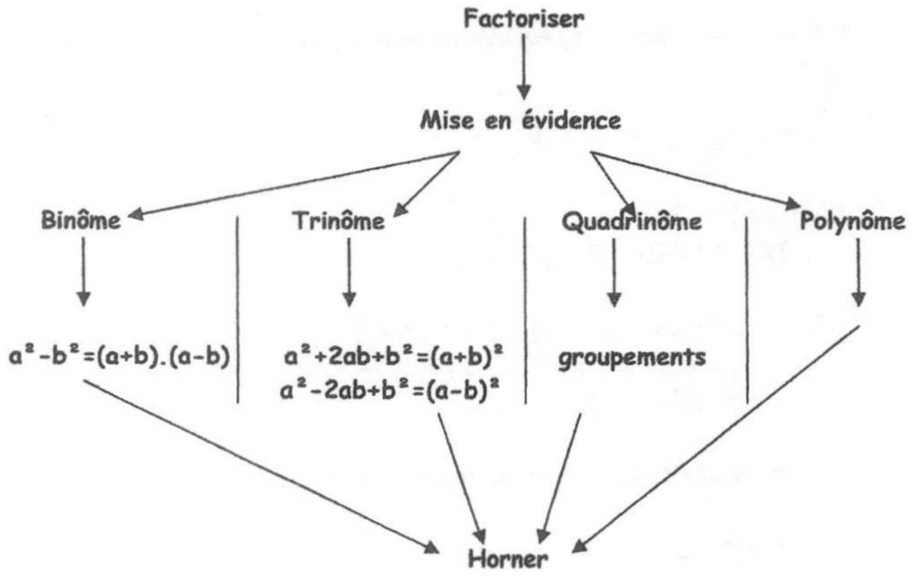
---

5) $2x^2 + 20x + 50 = 2 . (\underline{x^2} + 10x + \underline{25})$

$= 2 . (x + 5)^2$

- d'abord mettre en évidence.
- somme de deux carrés ? x^2 et 25
- double produit (et son signe ?) $2 . x . 5 = 10x$

3) Synthèse



Remarques :

- Le binôme $a^2 + b^2$ n'est pas factorisable.
- Il faut toujours factoriser au maximum !
- La méthode par Horner sera vue par après.

4) Exercices

Tous les exercices se réalisent sur une feuille quadrillée.

1 Factorise par mise en évidence :

Série 1	Série 2
1) $12ab - 15x =$	1) $3ab - 2ac =$
2) $24ab - 36a^2 =$	2) $a^3x - a^2x =$
3) $5x^3y^3 - 15xy^3 =$	3) $-12a^2x^3 + 30ax^2 =$
4) $35x^2y + 7xy - 21xy^2 =$	4) $12a^3b + 6ab^2 - 8a^4b =$
5) $a(x - y) + b(x - y) =$	5) $x^2(x + 2) + (x + 2)^2 =$
6) $(x^2 + 2x)(x - 3) - 5(x - 3) =$	6) $a(b - c) - 3(c - b) =$
7) $-7a.(3a - 1)^3 + 2.(1 - 3a)^2 =$	7) $(2a + 3b)(x - 2y) - (3b - 5a)(x - 2y) =$
8) $(a + 3)(x - y) - 2(y - x) =$	8) $(x - 2y)(a - b) + (b - a)(2x + y) =$

2 Factorise par groupements :

Série 1	Série 2
1) $a^3 - a^2b + ax - bx =$	1) $3xy + 3x^2 + 2ay + 2ax =$
2) $8ax - 8bx - ay + by =$	2) $12ax - 8x - 9ay + 6y =$
3) $x^3 + x - x^2 - 1 =$	3) $a^3 + 3a^2b + ab^2 + 3b^3 =$

3 Factorise en utilisant un des produits remarquables :

$a^2 - b^2 = (a + b) . (a - b)$ ou $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

Série 1	Série 2
1) $16x^2 - 25y^2 =$	1) $4 - x^2 =$
2) $- 64 + 49x^4 =$	2) $- 25a^2 + x^2 =$
3) $36a^2 - 9 =$	3) $36a^2 - (b - 2a)^2 =$
4) $9x^2 - (2x - 1)^2 =$	4) $3x^2 - 75 =$
5) $(3a + 5)^2 - (2 - 4a)^2 =$	5) $4x^2 - (2x - 3)^2 =$
6) $16x^2 - 8x + 1 =$	6) $20x + 25 + 4x^2 =$
7) $9x^2 + 12x + 4 =$	7) $36a^2 - 12a + 1 =$
8) $4a^2 + 25 - 20a =$	8) $2a^2 - 12a + 18 =$
9) $32x^2 - 48x + 18 =$	9) $x^3 + 2x^2 + x =$